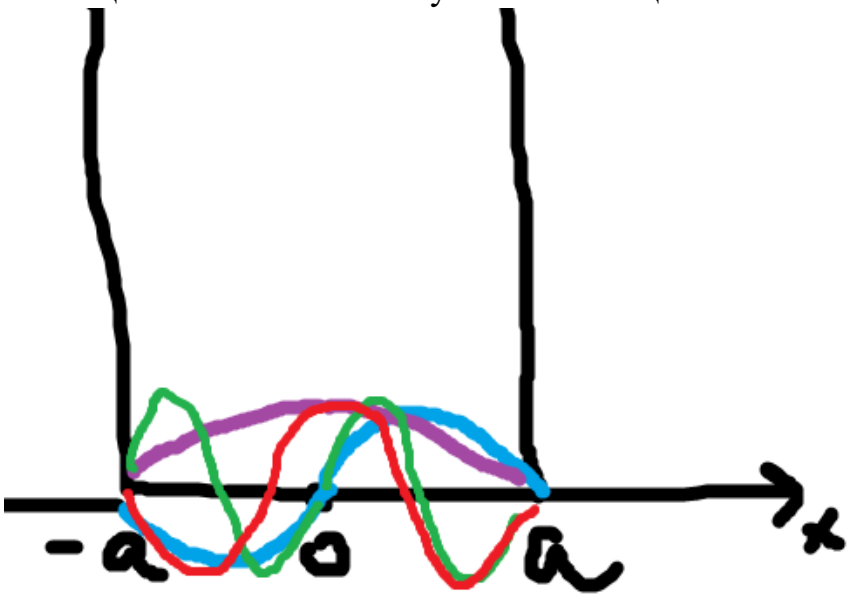
Что такое эволюция? Это то, как меняется Ψ с ходом времени. Говоря языком задро… геймеров, мы «снимаем игру с паузы» и смотрим, что будет.
Описывается эволюция нестационарным (логично) уравнением Шрёдингера:

$$ih\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x} = \hat{H}\Psi(x)$$

Решим задачу и на её примере посмотрим.
Потенциал - бесконечно глубокая потенциальная яма.



С СФ синусами и косинусами, которые зануляются при а и –а. Первые два синуса и первые два косинуса изображены на рисунке.
Нам дали ВФ в начальный момент времени

$$\Psi(x,0) = A\cos\frac{\pi x}{a}\left(1+\sin\frac{\pi x}{a}\right) = A\cos\frac{\pi x}{a} + \frac{A}{2}\sin\frac{\pi x}{a}$$

И спрашивают: а как же она будет меняться с течением времени? Т.е. от нас хотят Ψ(x, t) в любой момент времени?
Мы разложили ВФ в начальный момент времени по СФ. Только давайте найдём А.
По условию нормировки $A^2+A^2/4=1$, поэтому A=2/sqrt(5).

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{\pi x}{a}$$

Теперь мы снимаем с паузы время. Коэф-ты при СФ начинают меняться.
Для их нахождения решим нестационарное ур-е Шрёдингера:

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

$$-i\hbar\left[\dot{C}_1(t)\varphi_1+\dot{C}_2(t)\varphi_2\right]=E_1C_1(t)\varphi_1+E_2C_2(t)\varphi_2$$

Приравниваем коэфы перед фи1 и фи2:

$$\begin{cases}-i\hbar\dot{C}_1(t)=E_1C_1(t)\\-i\hbar\dot{C}_2(t)=E_2C_2(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{C}_1(t)=i\frac{E_1}{\hbar}C_1(t)\\\dot{C}_2(t)=i\frac{E_2}{\hbar}C_2(t)\end{cases}$$

Решаем дифуры:

$$C_1(t)=C_1(t=0)\exp\left(\frac{iE_1t}{\hbar}\right)$$

$$C_2(t)=C_2(t=0)\exp\left(\frac{iE_2t}{\hbar}\right)$$

В данном случае C1(t=0)=2/sqrt(5), C2(t=0)=1/sqrt(5). Осталось найти E1 и E2. Это

$$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2,\quad n=1,2,3,...$$

энергии ВФ.

Для cos(πħ/a) n=1, а для sin(2πħ/a), естественно, n=2, поэтому

$$C_1(t)=\frac{2}{\sqrt{5}}\exp\left(\frac{i\cdot\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}t}{\hbar}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}\exp\left(\frac{i\pi^2\hbar t}{2ma^2}\right)$$

$$C_2(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\exp\left(\frac{i\cdot\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\cdot 4}{\hbar}t\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\exp\left(\frac{i\cdot 2\pi^2\hbar t}{ma^2}\right)$$

Ну а $\Psi(t)=C1(t)\varphi_1(t)+C2(t)\,\varphi_2(t)$, сами подставите.

Таким образом, «вклад» в ВФ двух СФ различен и зависит от времени. То «на коне» $\varphi_1(t)$, то $\varphi_2(t)$. В какие-то моменты времени ВФ и вовсе будет одной из СФ (когда C1(t) или C2(t) занулится), но это будет на мгновение.

Отметим, что при этом ЗСЭ нарушаться не будет. В самом деле (подчёркивание=комплексное сопряжение) $\langle E\rangle=\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle=\rangle=\langle \underline{c1(t)}\varphi1+\underline{c2(t)}\varphi2|\mathbf{H}|c1(t)\varphi1+c2(t)\varphi2\rangle=\langle \underline{c1(t)}\varphi1+\underline{c2(t)}\varphi2|E1c1(t)\varphi1+E2c2(t)\varphi2\rangle=|c1(t)|^2E1+|c2(t)|^2E2$, а модули c1(t) и c2(t) от времени не зависят, т.е. это будет константа.

Именно для этого мы решаем стационарное уравнение Шрёдингера. Если мы его решим, то найдём СФ и СЗ гамильтониана. Тогда мы раскладываем ВФ в начальный момент времени по СФ

$$\Psi(x,t=0)=\sum_{k=0}^{N} c_k(t=0)\varphi_k(x)$$

И по находим ВФ с любой момент времени как

$$\Psi(x,t)=\sum_{k=0}^{N} c_k(t)\varphi(x)$$

Где

$$c_k(t)=c_k(t=0)\exp\left(\frac{iE_k t}{\hbar}\right).$$

Политическая аналогия.

В истории нашей страны всегда в политике варились люди разных взглядов: коммунисты, империалисты, социалисты, монархисты, либералы и т.д. и т.п. Думаю, читатель согласится в том, что роль то тех, то других постоянно то падала, то снижалась в разные годы.

Так вот, у нас тут то же самое. Уровни энергии – это партии. И СФ, им соответствующие, это тоже партии.

Пусть, например,

$$\Psi(1906,x)=0{,}3*\varphi_{\text{монархист}}(x)+0{,}4*\varphi_{\text{умерен.социалист}}(x)+0{,}3*\varphi_{\text{большевик}}(x)$$

(Типичная дореволюционная Дума. Не бейте тапками, я в разницах идеологий не шарю от слова «совсем»)

Потом в следующий времени, в феврале 1917

$\Psi(\text{февраль } 1917, x)$
$$= 0{,}1 * \varphi_{\text{монархист}}(x) + 0{,}7 * \varphi_{\text{умерен.социалист}}(x) + 0{,}2 * \varphi_{\text{большевик}}(x)$$
Эпоха Керенских всяких.

А потом в октябре как грянуло
$\Psi(\text{октябрь } 1917, x)$
$$= 0{,}1 * \varphi_{\text{монархист}}(x) + 0{,}2 * \varphi_{\text{умерен.социалист}}(x) + 0{,}7 * \varphi_{\text{большевик}}(x)$$

Сейчас же мы, напротив, ностальгируем по Российской империи и ностальгируем по Советскому союзу, пережив 90-е с их либерализмов. Не будем дальше уходить в политоту, важно, что в целом всё идёт по кругу – и в квантовой физике так же!

$$\Psi(t, x) = c_1(t)\varphi_1(x) + c_2(t)\varphi_2(x) + c_3(t)\varphi_3(x) + \cdots$$
Где с-шки – текущие «вклады» в данный момент времени различных СФ в текущую ВФ.
Все они колеблются с разной частотой:
$c_k(t) = c_k(0)e^{iE_k t/h}$
Продолжая аналогию с партиями – какие-то партии постоянно то на коне, то в говне, то на коне, то на говне ☺ А какие-то приходят редко, но надолго.

А что там со средними?
Иногда просят найти не ВФ в любой момент времени, а среднее значение величины в любой момент времени.

Сперва заметим, что среднее значение любой величины $< A >$ будет константой тогда и только тогда, если коммутатор
$[\hat{H}, \hat{A}] = 0$ и нет магнитного поля или явной зависимости H от времени .
Вообще это теорема из теормеха: если скобка пуассона H и A = 0, то A – т.н. интеграл движения.

Пример: $\hat{H} = \frac{\widehat{p_x}^2 + \widehat{p_y}^2 + \widehat{p_z}^2}{2m} + Eq_e x + U(y)$ (электромагнитное поле, функцию U(y) считать заданной). Найдите постоянные средние: $< H >, < p_x >, < p_y >, < p_z >$ $, < x >, < y >, < z >$.
Ответ: $< H >$ будет всегда, если только нет магнитного поля, одинаковым (ЗСЭ верен и в квантмехе). Что касается проекций импульса, то они, как правило, тоже коммутируют с гамильтонианом, если только потенциальная энергия не портит малину, т.к. оператор координаты уже коммутировать не будет. В данном случае $< p_z >$ будет постоянным, а $< p_x >$ и $< p_y >$ нет (что вполне естественно, поле будет разгонять частицу). Ну а координаты $< x >, < y >, < z >$ не коммутируют с гамильтонианом по умолчанию.

Задача для особо умных: атом водорода, где $U(x,y,z) = \frac{q_e^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, ничего не коммутирует, что делать? Ответ: перейти к другим обобщённым декартовым координатам: r и двум другим (например, тета и фи), тогда среднее значение обобщённых импульсов $< p_\varphi >$ и $< p_\theta >$ не будет меняться. Ну так атом водорода и решается на самом деле ☺ Типа как вы решали бы атом водорода в классике? Нужны три т.н. интеграла движения. Два – это p_φ и p_θ, а третий вы будете долго и мучительно искать. В квантах, если вы обладаете должной абстракцией, вы обнаружите то же самое.

Стоп оффтоп! ОК, мы сразу отсеяли те средние, которые не будут меняться со временем. А что делать с теми, которые со временем меняются?

Ну, вообще говоря, формула среднего значения верна всегда:

$$< A(t) > =< \Psi(t)\left|\hat{A}\right|\Psi(t) >$$

Но если вы подставите разложение ВФ на СФ, то убедитесь, что можно это записать попроще:

$$< A(t) > = |c_1(t)|^2 *< \varphi_1\left|\hat{A}\right|\varphi_1 > +|c_2(t)|^2 *< \varphi_2\left|\hat{A}\right|\varphi_2 > + \cdots$$

У каждой партии есть своё среднее значение А и ВФ будет между ними осциллировать, отдавая предпочтение то одному, то другому ☺

Продолжая политическую тему,

$$< \text{путь России}(t) > = \left|c_{\text{либерал}}(t)\right|^2 * (\text{Россия должна подражать Европе}) + \left|c_{\text{импер}}(t)\right|^2 * (\text{русский мир} - \text{это главное}) + \cdots$$

Практическое замечание: все φ_k должны быть СФ гамильтониана! Например, вот задача:

Волновая функция частицы массой m, находящейся в одномерной симметричной прямоугольной потенциальной яме шириной a, в момент времени $t = 0$ определяется выражением: $\psi(x) = A\sin^3(\pi x / a)$. Найти зависимости от времени средних значений координаты и энергии частицы.

Куб синуса – это не СФ. Идёте в гугл, вбиваете «разложение куба синуса», получаете формулу из 10 класса и раскладываете на две СФ.